Planare 3H-Graphen und ihre dualen Graphen

Proksch, Ruth

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 35, 1983, S.15-24

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Planare 3H-Graphen und ihre dualen Graphen

Von **Ruth Proksch,** Hannover

Vorgelegt von Theodor Kaluza

(eingegangen am 18.11.1982)

Ein planarer 3H-Graph ist [1] 3-regulär, endlich und hat 3 Hamilton-Kreise, die so verlaufen, daß jede Kante des Graphen zu genau zweien von ihnen gehört. Ist H einer von 3 solchen Hamilton-Kreisen, so färbe man die Kanten von H bei einer Durchlaufung abwechselnd rot und blau und die übrigen Kanten des Graphen grün. Dann sind außer den rot-blauen Kanten auch die rot-grünen Kanten und die blau-grünen Kanten eines 3H-Graphen Hamiltonsche Kreise [1].

Eine auf diese Art entstandene Färbung nennen wir 3H-Färbung [1]. Sie ist zugleich eine Kanten-3-Färbung im üblichen Sinn. An jeder Ecke V_3 eines so gefärbten 3H-Graphen stoßen 3 verschieden gefärbte Kanten zusammen [1].

Ein 3-regulärer Graph ist genau dann ein 3H-Graph, wenn er eine 3H-Färbung seiner Kanten besitzt [1].

Im folgenden werden die zu den 3-regulären planaren Graphen dualen Graphen betrachtet, d.h. die Triangulationen der Kugeloberfläche. Sie werden mit T_v, $v =$ Eckenzahl, bezeichnet. Jeder Ecke V_3 des 3-regulären Graphen entspricht eine Dreiecksfläche der zu ihm dualen T_v. Der Satz von G. Tait [2] soll hier in folgender Formulierung benützt werden:

Satz 1: Jede Kanten-3-Färbung eines planaren 3-regulären Graphen ergibt eine Ecken-4-Färbung der zu ihm dualen T_v.

Um Teile der Argumentation später benützen zu können, sei eine Skizze des Beweises [2] angegeben.

Gegeben sei eine Kanten-3-Färbung des planaren 3-regulären Graphen. Die Farbe einer Kante dieses 3-regulären Graphen, die 2 Ecken V_3 verbindet, sei die gleiche, wie die Farbe der Kante in der zu ihm dualen T_v, die die entsprechenden 2 Dreiecksflächen der T_v trennt. Die so konstruierte Kanten-3-Färbung der T_v umgibt jede Dreiecksfläche der T_v mit 3 verschieden gefärbten Kanten: grün, blau, rot. Die Ecken einer jeden Kante k der T_v werden nun mit denjenigen beiden Eckenfarben aus a, b, c, d gefärbt, die in einem der beiden folgenden Paare vorkommen:

Kante grün	Ecken a, b oder c, d	Kante ————
Kante blau	Ecken a, c oder b, d	Kante ....
Kante rot	Ecken a, d oder b, c	Kante – – – – – –

Bei dieser Kantenfärbung der T_v umfaßt die Menge der grünen Kanten das Paar der Kempeketten ab–cd, die Menge der blauen Kanten das Paar von Kempeketten ac–bd, die Menge der roten Kanten das Paar von Kempeketten ad–bc [3]. Daher erhält man [2] aus der Kanten-3-Färbung des planaren 3-regulären Graphen eine Ecken-4-Färbung der zu ihm dualen T_v, w.z.b.w.

Satz 2: Jede 3H-Färbung eines planaren 3-regulären Graphen liefert eine Ecken-4-Färbung der zu ihm dualen T_v.

Beweis: Eine 3H-Färbung ist eine Kanten-3-Färbung im üblichen Sinn [1]. Daraus folgt die Behauptung.

Satz 3: Ein planarer 3-regulärer Graph ist dann und nur dann ein 3H-Graph, wenn die zu ihm duale T_v ecken-4-färbbar ist und bei wenigstens einer ihrer Ecken-4-Färbungen für jede der 3 Farbpaarwahlen keine geschlossenen Kempeketten hat.

Beweis:

1. Nach Voraussetzung sei die zu dem betrachteten 3-regulären Graphen duale T_v ecken-4-färbbar und habe bei wenigstens einer ihrer Ecken-4-Färbungen für jede der 3 Farbpaarwahlen keine geschlossenen Kempeketten. D.h. bei wenigstens einer Ecken-4-Färbung der dualen T_v enthalten die Kempeketten ab–cd, ac–bd, ad–bc keine Kreise. Dann ist die Zuordnung der Ecken der T_v zu den Eckenfarben a, b, c, d, die durch die Kanten-3-Färbung gegeben ist, bis auf Permutation aller 4 Farben a, b, c, d eindeutig. Beispielsweise bilden bei der Farbpaarwahl ab–cd sowohl die ab-Kanten wie die cd-Kanten zusammenhängende Ketten, die nicht in Teilstücke zerfallen und keine Kreise bilden; gemeinsam enthalten sie alle Ecken der T_v. Das Gleiche gilt für die Farbpaarwahlen ac–bd und ad–bc der betrachteten Ecken-4-Färbung. In der dualen Darstellung sind daher die Kantensysteme grün-blau, blau-rot, rot-grün Hamiltonsche Kreise, die jeweils alle Ecken des dualen 3-regulären Graphen enthalten, ohne in Teilgraphen zu zerfallen. Würde beispielsweise das Kantensystem grün-blau in Teile zerfallen, so müßten die roten Kanten in der dualen T_v Kreise bilden, so daß die Kantenfarben grün-blau auf einem der Teile in blau-grün getauscht werden könnten. Ein Tausch grün-blau in blau-grün für einen Teil der Kanten bedeutet den Tausch ab–cd in ac–bd, also den Tausch der Eckenfarben des dualen Graphen T_v für einen Teil der Ecken b in c. Da die Zuordnung der Ecken zu den Farben a, b, c, d eindeutig war, ist ein solcher Tausch der Kantenfarben nicht möglich. Dann aber gehört jede Kante des 3-regulären Graphen zu genau 2 Hamiltonschen Kreisen. Der 3-reguläre Graph ist ein 3H-Graph.

2. Nach Voraussetzung sei der 3-reguläre Graph ein 3H-Graph, d.h. er hat eine Kanten-3-Färbung grün, blau, rot, so daß die Kantensysteme grün-blau, blau-rot, rot-grün 3 Hamiltonsche Kreise bilden. Dann entspricht in der dualen Darstellung das rote, blaue und grüne Kantensystem je einem Paar von Kempeketten, das alle Ecken der T_v enthält, die eindeutig mit a, b, c, d gefärbt sind (bis auf Permutation aller Eckenfarben). Die Zuordnung der Eckenfarben a, b, c, d ist für die End-Ecken jeder Kante eindeutig, weil der entsprechende 2-Faktor nach Voraussetzung ein Hamiltonscher Kreis ist, der nicht in Teilgraphen zerfällt. Daher bilden die Kempeketten der ecken-4-gefärbten T_v zusammenhängende kreisfreie Kantenzüge, die paarweise alle Ecken der T_v enthalten. Die zugehörige Ecken-4-Färbung der T_v hat also bei jeder Farbpaarwahl keine geschlossenen Kempeketten, w.z.b.w.

Nach [1], S. 33, wird ein 3H-Graph ein reiner 3H-Graph genannt, wenn jede 3-Färbung seiner Kanten eine 3H-Färbung ist.

Satz 4: Ein planarer 3H-Graph ist dann und nur dann ein reiner 3H-Graph, wenn die zu ihm duale T_v ecken-4-färbbar ist und bei jeder ihrer Ecken-4-Färbungen für jede der 3 Farbpaarwahlen keine geschlossenen Kempeketten hat.

Beweis: Die Richtigkeit der Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 3.

Das Tetraeder (genauer: der von seinen Ecken und Kanten gebildete Graph) ist ein reiner 3H-Graph. Die zu ihm duale T_4 ist ebenfalls ein Tetraeder und besitzt genau 1 Ecken-4-Färbung, die bei jeder Farbpaarwahl keine geschlossenen Kempeketten hat.

Ein weiteres Beispiel ist der 3-reguläre Graph in Bild 1, der genau 2 Kanten-3-Färbungen hat (Bild 1 und 3). Zu ihm dual ist eine T_9 (Bild 2) mit genau 2 Ecken-4-Färbungen (Bild 2 und 4). Bei jeder von ihnen treten für jede Farbpaarwahl keine geschlossenen Kempeketten auf. Das Kanten- und Eckensystem in Bild 1 ist ein reiner 3H-Graph.

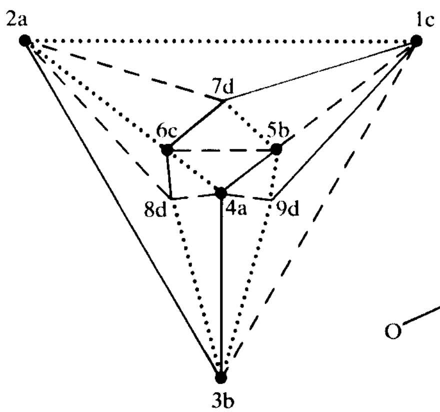


Bild 2

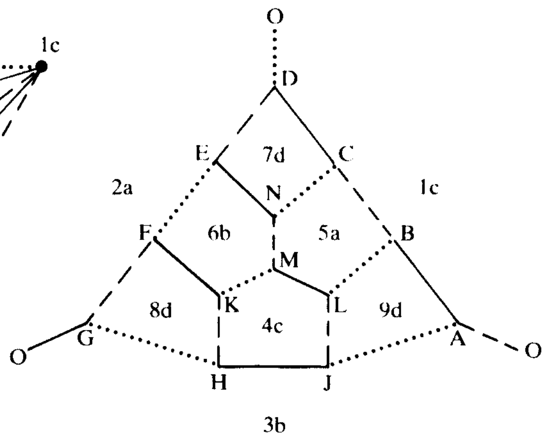


Bild 1

Kempeketten-Paare

ab–cd (2,3,4,5; 9,1,7,6,8)
ac–bd (1,2,6,4; 8,3,9,5,7)
ad–bc (3,1,5,6; 7,2,8,4,9)

3 Hamiltonsche Kreise

H_1 (A, I, L, B, C, N, M, K, H, G, F, E, D, O, A)
H_2 (A, B, C, D, E, N, M, L, I, H, K, F, G, O, A)
H_3 (A, I, H, G, O, D, C, N, E, F, K, M, L, B, A)

Im folgenden werden diejenigen Triangulationen T_v betrachtet, die aus dem Tetraeder durch fortgesetztes Aufsetzen eines weiteren Tetraeders auf jede Seitenfläche entstehen. Auf diese Weise erhält man eine unendliche Menge von Triangulationen, deren duale Gebilde sämtlich reine 3H-Graphen sind. Die so entstandenen Triangulationen sollen Tetraeder-Derivate heißen. Jedes Tetraeder-Derivat hat

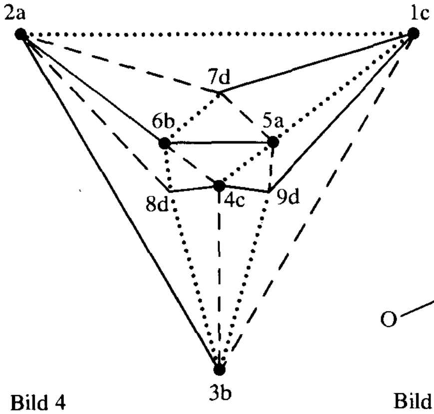


Bild 4

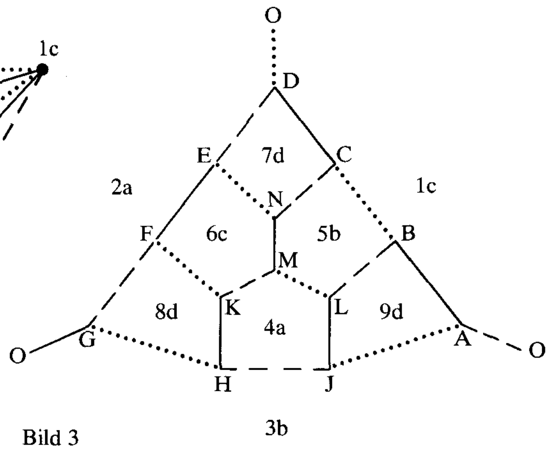


Bild 3

Kempeketten-Paare	3 Hamiltonsche Kreise
ab–cd (3,2,6,5; 7,1,9,4,8)	H_1 (A,I,H,G,F,K,M,L,B,C,N,E,D,O,A)
ac–bd (2,1,5,4; 7,6,8,3,9)	H_2 (A,B,L,I,H,K,M,N,C,D,E,F,G,O,A)
ad–bc (8,2,7,5,9; 6,4,3,1)	H_3 (A,I,L,M,N,E,F,K,H,G,O,D,C,B,A)

genau eine Ecken-4-Färbung (bis auf Permutation aller 4 Eckenfarben). Das dazu duale Gebilde hat genau eine Kanten-3-Färbung, die eine 3H-Färbung ist.

In Bild 5 und 6 ist die dreiseitige Doppelpyramide auf 2 Weisen dargestellt, in Bild 7 der dazu duale 3-reguläre Graph. Die Kempeketten der Ecken-4-Färbung und die 3 Hamiltonschen Kreise der Kanten-3-Färbung sind angegeben. Bei jeder der 3 Farbpaarwahlen gibt es keine geschlossenen Kempeketten.

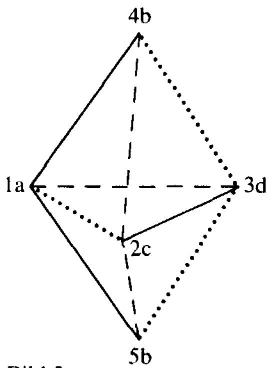


Bild 5

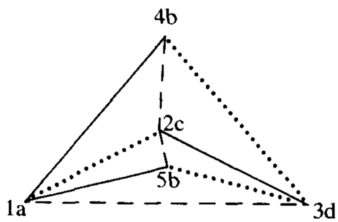


Bild 6

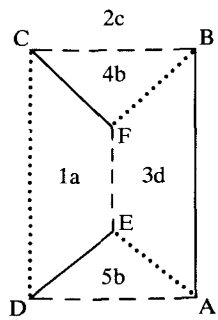


Bild 7

Kempeketten-Paare	3 Hamiltonsche Kreise
ab–cd (4,1,5;2,3)	H_1 (A,E,F,B,C,D,A)
ac–bd (1,2;5,3,4)	H_2 (A,B,C,F,E,D,A)
ad–bc (1,3;5,2,4)	H_3 (A,B,F,C,D,E,A)

Satz 5: Das Ecken- und Kantensystem eines 3-regulären Graphen, der zu einem Tetraeder-Derivat dual ist, ist ein reiner 3H-Graph.

Beweis: Ein 3-regulärer Graph, der zu einem Tetraeder-Derivat dual ist, hat genau eine Kanten-3-Färbung. Denn die zu ihm duale T_v hat nach Konstruktion genau eine Ecken-4-Färbung. Auf jede Dreiecksfläche, die 3 Eckenfarben beansprucht, wird eine Ecke V_3 aufgesetzt, die die jeweils 4. Farbe erhält. Aus der Einzigkeit dieser Ecken-4-Färbung folgt, daß bei jeder Farbpaarwahl keine geschlossenen Kempeketten auftreten. Daher ist der 3-reguläre Graph, der zu einem Tetraeder-Derivat dual ist, ein reiner 3H-Graph.

Satz 6: Ein 3-regulärer planarer Graph, der zu einem Tetraeder-Derivat dual ist, hat 3 Hamiltonsche Kreise.

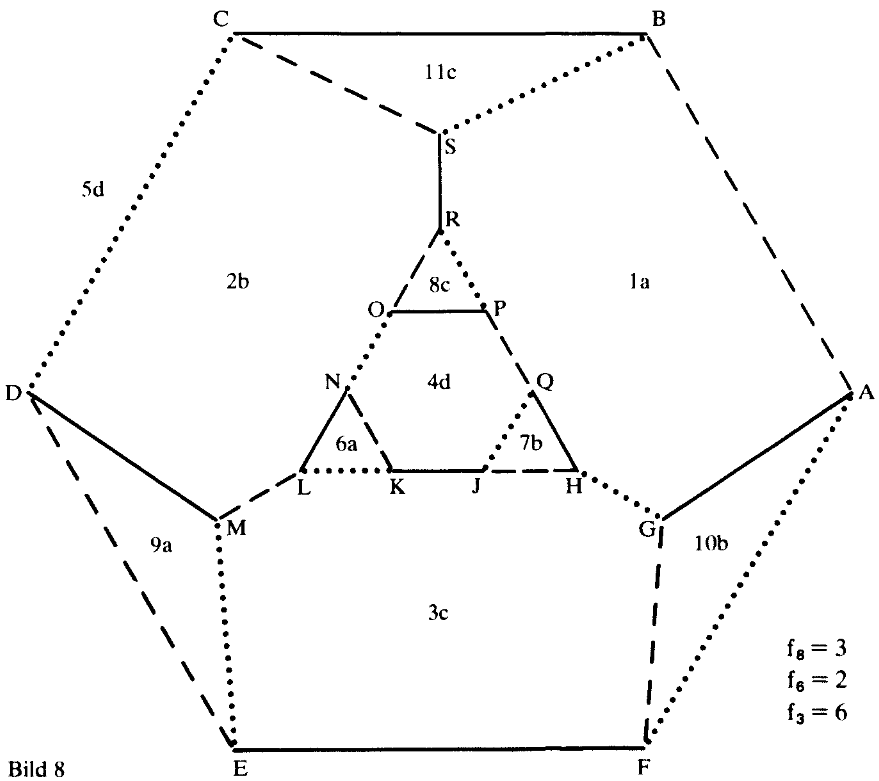


Bild 8

3 Hamiltonsche Kreise

H_1 (A, B, S, C, D, E, M, L, K, N, O, R, P, Q, I, H, G, F)	Anzahl der Flächen 11
H_2 (A, G, F, E, D, M, L, N, K, I, H, Q, P, O, R, S, C, B)	Anzahl der Ecken 18
H_3 (A, G, H, Q, I, K, L, N, O, P, R, S, B, C, D, M, E, F)	Anzahl der Kanten 27

Beweis: Nach Satz 5 ist ein solcher Graph ein reiner 3H-Graph. Die genau **eine** Ecken-4-Färbung der dualen T_v liefert eine Kanten-3-Färbung, die auf dem 3-regulären Graphen eine 3H-Färbung ist.

Satz 7: Zu jeder Flächenzahl $f \geqq 4$ gibt es planare 3H-Graphen, die zu Tetraeder-Derivaten dual sind.

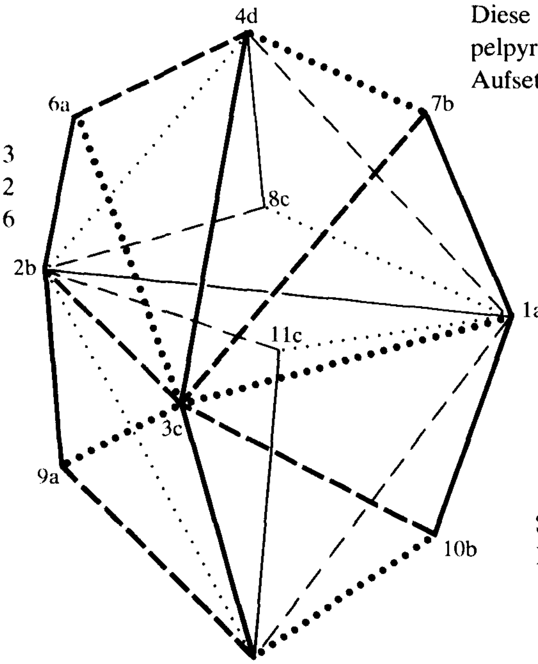
Sie sollen Tetraeder-Derivat-Duale heißen.

Beweis: Die Flächenzahl f des Tetraeder-Derivat-Dualen ist gleich der Eckenzahl v des Tetraeder-Derivates T_v, $f = v$. Nach Konstruktion gibt es zu jeder Eckenzahl $v \geqq 4$ Tetraeder-Derivate. Denn jede Tetraeder-Aufsetzung erhöht die Eckenzahl v um 1. Die Anzahl der Flächen des Tetraeder-Derivates $f_t = 2v-4$ ist gleich der Eckenzahl des Tetraeder-Derivat-Dualen.

Die Existenz von Hamiltonschen Kreisen auf einem 3-regulären 3H-Graphen wird beim Übergang zu seinem dualen Graphen nicht übertragen. In Bild 8 wird ein 3H-Graph, f = 11, dargestellt, für den 3 Hamiltonsche Kreise angegeben sind. Der zu ihm duale Graph, eine T_{11}, hat keinen Hamiltonschen Kreis [4], Bild 9.

T_{11}

$v_8 = 3$
$v_6 = 2$
$v_3 = 6$



Diese T_{11} ist eine dreiseitige Doppelpyramide (1,2,3,4,5) mit 6 V_3-Aufsetzungen [5].

Diese T_{11} ist ein Tetraeder-Derivat. Sie hat genau eine Ecken-4-Färbung.

Sie hat keinen Hamiltonschen Kreis [4].

Bild 9

Die Kempeketten-Paare sind Kantensysteme mit Verzweigungen, die keine Kreise enthalten.

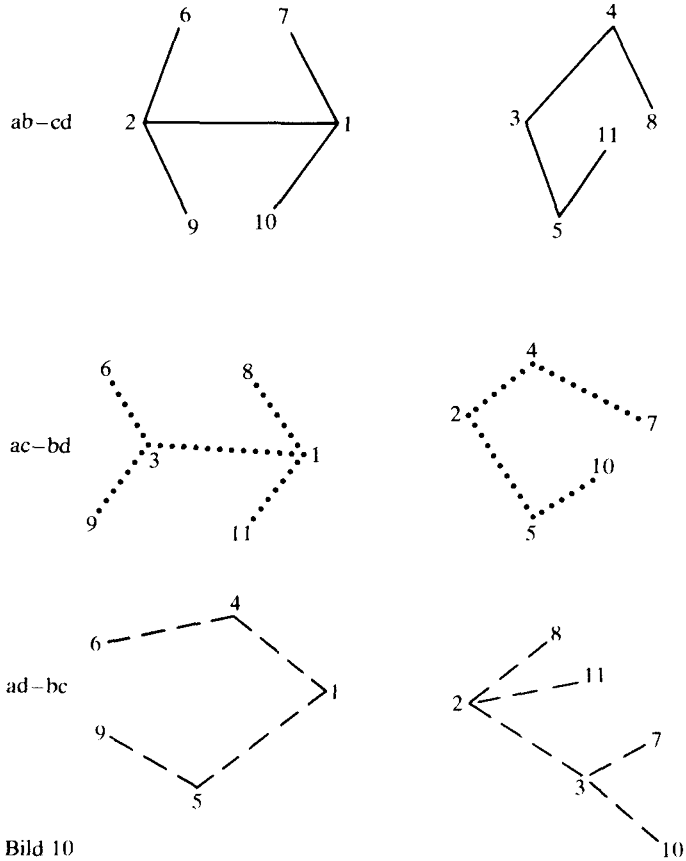


Bild 10

Daß beim Übergang zum dualen Gebilde die Anzahl Hamiltonscher Kreise nicht mit übertragen wird, sieht man auch am Beispiel des Dodekaeders. Bekanntlich hat es 30 Hamiltonsche Kreise, während das Ikosaeder 1280 Hamiltonsche Kreise hat [6].

Nun sollen noch einige 3-reguläre Graphen betrachtet werden, die keine 3H-Graphen sind, deren duale Graphen jedoch Triangulationen T_v sind.

Bild 11 zeigt einen 3-regulären Graphen mit 6 Ecken und 5 Flächen, der 4 Kanten-3-Färbungen hat. Für jede von ihnen können 2 Hamiltonsche Kreise angegeben

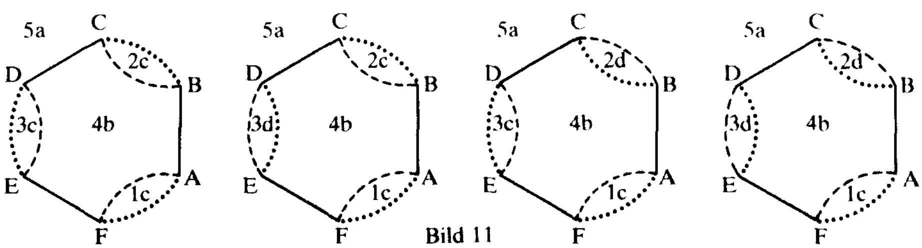


Bild 11

werden. Der dritte 2-Faktor zerfällt in 3 Zweierkreise, wodurch die Eigenschaft, 3H-Graph zu sein, zerstört wird. Der zu ihm duale Graph ist eine Triangulation T_5, die 4 Ecken-4-Färbungen hat. Sie besitzt keinen Hamiltonschen Kreis (Bild 12) [5].

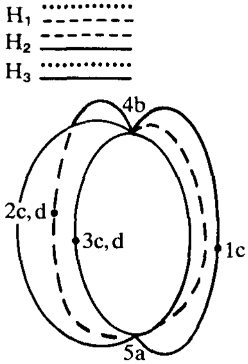


Bild 12

Für jede dieser 4 Kanten-3-Färbungen zerfällt der 2-Faktor H_1 in 3 Zweierkreise. H_2 und H_3 sind je 2 Hamiltonsche Kreise. Der Graph ist kein 3H-Graph.

Der zu ihm duale Graph hat 5 Ecken, $v_6 = 2$, $v_2 = 3$. Die Anzahl der Dreiecksflächen ist 6.

Wie Bild 12 zeigt, ist dieser Graph eine Triangulation der Kugeloberfläche, die keinen Hamiltonschen Kreis gestattet.

Die Kempeketten ab–cd bilden ab-Kreise (Bild 13).

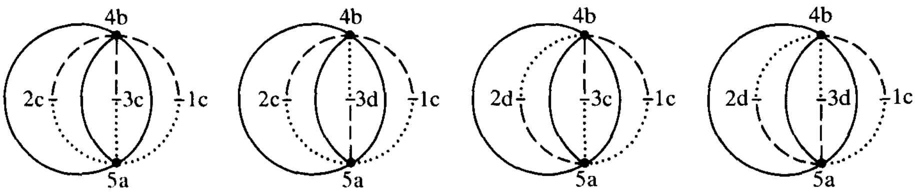


Bild 13

Ein weiteres Beispiel ist das Kanten- und Eckensystem des Würfels, das ebenfalls 4 Kanten-3-Färbungen besitzt (Bild 14).

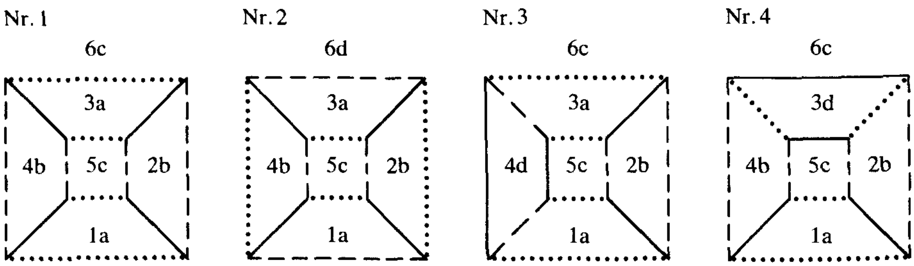


Bild 14

Nr. 1	Nr. 2	Nr. 3	Nr. 4
H_1 2 Kreise	H_1 2 Kreise	H_1 1 Kreis	H_1 1 Kreis
H_2 2 Kreise	H_2 1 Kreis	H_2 2 Kreise	H_2 1 Kreis
H_3 2 Kreise	H_3 1 Kreis	H_3 1 Kreis	H_3 2 Kreise

Aus dieser Übersicht ist zu ersehen, daß keine der 4 Kanten-3-Färbungen des Würfels eine 3H-Färbung ist. Bei jeder von ihnen zerfällt wenigstens ein 2-Faktor in 2 Kreise. Bekanntlich hat der Würfel 6 Hamiltonsche Kreise, die topologisch gesehen vom gleichen Typ sind. Es sind die Hamilton-Kreise H_2, H_3 von Nr. 2; H_1, H_3 von Nr. 3; H_1, H_2 von Nr. 4.

Das zum Würfel duale Gebilde ist das Oktaeder, das 4 Ecken-4-Färbungen hat, die in Bild 15 dargestellt sind.

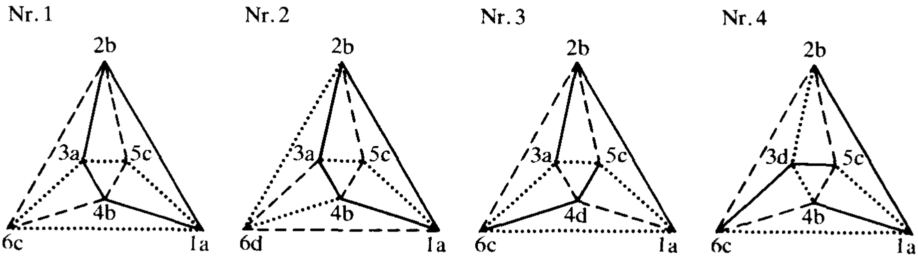


Bild 15

Nr. 1	Nr. 2	Nr. 3	Nr. 4
ab–cd ab-Kreis	ab–cd ab-Kreis	ab–cd offen	ab–cd offen
ac–bd ac-Kreis	ac–bd offen	ac–bd ac-Kreis	ac–bd offen
ad–bc bc-Kreis	ad–bc offen	ad–bc offen	ad–bc bc-Kreis

Bei jeder Ecken-4-Färbung des Oktaeders treten für mindestens eine der 3 Farbpaarwahlen geschlossene Kempeketten auf.

Dieser Sachverhalt steht in Übereinstimmung mit Satz 3. Das Oktaeder hat bekanntlich 16 Hamiltonsche Kreise, dabei (125436)/(125346) 2 Typen, die topologisch nicht äquivalent sind. Keiner dieser Hamiltonschen Kreise wird durch Kempeketten-Paare realisiert.

Nach einem Resultat von H. Whitney [4] hat jede Triangulation T_v, die keine Ecken V_2 oder V_3 enthält, einen Hamiltonschen Kreis. Sie ist daher als Bidiagonalisierung dieses Hamiltonschen Kreises darstellbar [5]. Sowohl die Oberseite wie die Unterseite dieses Randkreises sind durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt, die sich nicht in je ihrem Blatt überschneiden. In jedem Blatt kommen mindestens zwei Randdreiecke vor, die mit dem Hamiltonschen Kreis 2 Kanten gemeinsam haben [5]. Bei einer Kanten-3-Färbung dieser Bidiagonalisierung kann es nicht vorkommen, daß der Hamiltonsche Kreis mit einer einheitlichen Kantenfarbe gefärbt wird. Sonst würde für die Randdreiecke die Färbevorschrift verletzt werden, wonach jede Dreiecksfläche von 3 verschiedenen Kantenfarben umgeben wird. Daher kann der Hamiltonsche Kreis auch nicht durch Kempeketten-Paare realisiert werden.

Die Bedingung, daß ein 3-regulärer Graph ein 3H-Graph sei, führt im planaren Fall auf die Betrachtung der Eigenschaften von ecken-4-färbbaren Triangulationen, insbesondere auf das Studium der Kempeketten bei Ecken-4-Färbung. Hier sind es diejenigen Triangulationen, die bei wenigstens einer Ecken-4-Färbung keine geschlossenen Kempeketten haben. Es handelt sich also um Triangulationen, die der Ecken-4-Färbung gegenüber große Schwierigkeiten bereiten. Denn i.a. ist das Auftreten geschlossener Kempeketten ein Anzeichen dafür, daß Mehrfachfärbung bei der untersuchten T_v vorliegt, was die Untersuchung des Färbeverhaltens sehr erleichtert.

Literatur

[1] Th. KALUZA: Existenz-, Nichtexistenz- und Aufbau-Aussagen für 3H-Graphen. Abh. d. Braunschw. Wiss. Ges., Bd. 32, 1981, S. 25–37.
[2] K. WAGNER: Graphentheorie. BI-Hochsch. Taschenbücher 248/248a, Bibl. Inst. Mannheim, 1970, S. 143 ff.
[3] H. HEESCH: Untersuchungen zum Vierfarbenproblem. Bibl. Inst. 1969, BI-Hochschulskripten, 810/810a/810b, S. 43 ff.
[4] H. WHITNEY: A Theorem on Graphs. Annals of Math. **32**, 1931.
[5] R. PROKSCH: Triangulationen als Bidiagonalisierungen. MU, Verlag Klett, Jg. 25, 1979, Heft 4, S. 24–45.
[6] H. HEESCH: Die Zwölfecke durch sämtliche Ecken eines Ikosaeders. MU, Verlag Klett, Jg. 25, 1979, H. 4, S. 46–61.